

Olimpiada națională de matematică

etapa locală

05.03.2016

Clasa a IX-a

BAREM DE CORECTARE

1. Aflați numerele naturale nenule a_1, a_2, \dots, a_n ce verifică relația:

$$a_1^2 + 2a_2^2 + \dots + na_n^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

prof. Bud Adrian, Liceul Teoretic Negrești Oaș

Soluție:

Pt $n = 1 \Rightarrow a_1^2 = a_1^2$. Notăm $a_1 = a \in \mathbb{N}^*$ 1p

Pt $n = 2 \Rightarrow a^2 + 2a_2^2 = (a + a_2)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2aa_2 + a_2^2 \Rightarrow a_2^2 = 2aa_2 | : a_2 \Rightarrow a_2 = 2a$ 1p

Presupunem că $a_k = ka$ și demonstrăm că $a_{k+1} = (k+1)a$ 1p

$P(k): a_1^2 + 2a_2^2 + \dots + ka_k^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2$

$P(k+1): \underbrace{a_1^2 + 2a_2^2 + \dots + ka_k^2}_{P(k)} + (k+1)a_{k+1}^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1})^2$ 1p

$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2 + (k+1)a_{k+1}^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2 + 2(a_1 + \dots + a_k)a_{k+1} + a_{k+1}^2$
 $\Rightarrow ka_{k+1}^2 = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k)a_{k+1} | : a_{k+1}$

$ka_{k+1} = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$

$ka_{k+1} = 2a \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow a_{k+1} = (k+1)a$ Adev. 2p

finalizare 1p

2. Fie M, N, P, Q, R, S respectiv mijloacele laturilor $[AB], [BC], [AF], [DE], [CD], [EF]$ ale hexagonului convex $ABCDEF$. Dacă G_1, G_2, G_3, G_4 sunt respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor MNP, BCD, QRS și AEF . Arătați că patrulaterul $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.

Tămăian Traian și Buth Gigel

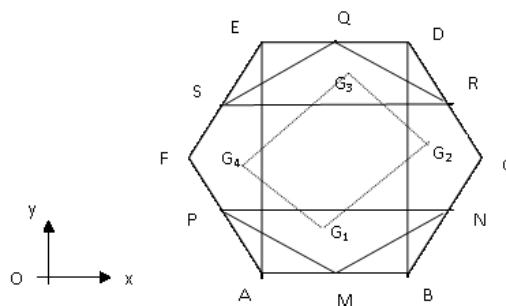
Soluție:

Fie O originea sistemului.

Cum G_1, G_2, G_3, G_4 sunt respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor MNP, BCD, QRS, AEF rezultă:

$$3 \cdot \overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} \quad (1)$$

1p





și analoagele $3 \cdot \overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ (2)

1p

$$3 \cdot \overrightarrow{OG_3} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} \quad (3)$$

1p

$$3 \cdot \overrightarrow{OG_4} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} \quad (4)$$

1p

Din relațiile (1) și (3) obținem:

$$3 \cdot (\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_3}) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} =$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OF}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) =$$

$$= \frac{1}{2}(2 \cdot \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{OB} + 2 \cdot \overrightarrow{OC} + 2 \cdot \overrightarrow{OD} + 2 \cdot \overrightarrow{OE} + 2 \cdot \overrightarrow{OF}), \text{ de unde}$$

$$3 \cdot (\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_3}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} \quad (5)$$

1p

Din relațiile (2) și (4) rezultă:

$$3 \cdot (\overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{OG_4}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} \quad (6)$$

1p

Din (5) și (6) obținem că $\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_3} = \overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{OG_4}$, de unde rezultă că patrulaterul $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.

1p

3. a) Arătați că $(x+a)(x+b) \geq (x+\sqrt{ab})^2$ pentru orice $a, b, x \in [0, \infty)$

b) Demonstrați că pentru orice numere reale pozitive a, b, c are loc dubla inegalitate

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq (a+\sqrt{bc})(b+\sqrt{ca})(c+\sqrt{ab}) \geq 8abc.$$

Tămâian Traian și Buth Gigel

Soluție:

Inegalitatea se scrie echivalent

$$x^2 + x(a+b) + ab \geq x^2 + 2x\sqrt{ab} + ab \Leftrightarrow x(a+b-2\sqrt{ab}) \geq 0 \Leftrightarrow x(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0, \quad 2p$$

adevărată pentru orice $a, b, x \in [0, \infty)$.

b) Pentru $x = c$ din inegalitatea de la a) obținem: $(c+a)(c+b) \geq (c+\sqrt{ab})^2$ (1) 1p

și analoagele $(a+b)(a+c) \geq (a+\sqrt{bc})^2$ (2)

$$(b+c)(b+a) \geq (b+\sqrt{ca})^2 \quad (3) \quad 1p$$

Înmulțind relațiile (1), (2) și (3) rezultă $(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq (a+\sqrt{bc})^2(b+\sqrt{ca})^2(c+\sqrt{ab})^2$, de unde obținem

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq (a+\sqrt{bc})(b+\sqrt{ca})(c+\sqrt{ab}) \quad (4) \quad 1p$$

Folosind inegalitatea mediilor avem: $a + \sqrt{bc} \geq 2 \cdot \sqrt{a\sqrt{bc}}$



și analoagele $b + \sqrt{ca} \geq 2 \cdot \sqrt{b\sqrt{ca}}$, $c + \sqrt{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{c\sqrt{ab}}$. 1p

Înmulțind ultimele trei inegalități obținem $(a + \sqrt{bc})(b + \sqrt{ca})(c + \sqrt{ab}) \geq 8abc$ (5) 1p

4. Fie numerele reale $a = \prod_{k=1}^{2016} (\sqrt{k+1} - (-1)^k \sqrt{k})$, $b = \prod_{k=1}^{2016} (\sqrt{k+1} + (-1)^k \sqrt{k})$

și funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{(\pi+1)x+1}{(x+1)(x^2+\pi x+1)}$.

a) Arătați că $ab = 1$

b) Să se demonstreze că numărul $A = \frac{f(a)+f(b)}{f(\sqrt{ab})}$ este natural.

Tămâian Traian și Buth Gigel

Soluție:

Deoarece $ab = \prod_{k=1}^{2016} [(\sqrt{k+1})^2 - (-1)^{2k} (\sqrt{k})^2] = \prod_{k=1}^{2016} [(k+1) - k] = 1$ 1p

rezultă $b = \frac{1}{a}$ 1p

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{(\pi+1)a+1}{(1+a)(a^2+\pi a+1)} + \frac{(\pi+1)\frac{1}{a}+1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\pi\frac{1}{a}+1\right)} = \\ &= \frac{(\pi+1)a+1}{(1+a)(a^2+\pi a+1)} + \frac{(\pi+1)a^2+a^3}{(1+a)(a^2+\pi a+1)} = \frac{a^3+(\pi+1)a^2+(\pi+1)a+1}{(1+a)(a^2+\pi a+1)} = \end{aligned}$$

$$\frac{(a+1)(a^2-a+1)+(\pi+1)a(a+1)}{(1+a)(a^2+\pi a+1)} = \frac{(1+a)(a^2+\pi a+1)}{(1+a)(a^2+\pi a+1)} = 1. \quad 3p$$

Cum $ab = 1$ rezultă că $f(\sqrt{ab}) = f(1) = \frac{\pi+2}{2(\pi+2)} = \frac{1}{2}$ 1p

și se obține că $A = \frac{f(a)+f(b)}{f(\sqrt{ab})} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, care este natural. 1p